ΑΣΚΗΣΗ Β-30 (ΛΥΜΕΝΕΣ)

Έστω η Δ.Ε

$y'' - y' - 2y = 4e^{-x}$ όπου $y(0) = a$, $y'(0) = b$

Να βρεθεί μια ικανή και αναγκαία συνθήκη (a, β) ώστε η y_0 να είναι φραγμένη στο $+\infty$

Λύση

Έστω η ομογενής (E_0): $y'' - y' - 2y = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -1$ ρίζες του χ.π

ΒΣΛ $\{e^{-x}, e^{2x}\}$ (γραμμικώς ανεξάρτητα)

Για να βρούμε μια μερική λύση θέτουμε $y = ze^{-x}$

$y' = z' \cdot e^{-x} + z \cdot (-e^{-x}) \Rightarrow y'' = z'' \cdot e^{-x} + 2z'(-e^{-x}) + z \cdot e^{-x}$

Αντικαθιστούμε και παίρνουμε:

$z'' e^{-x} + 2z'(-1) \cdot e^{-x} + ze^{-x} - z'e^{-x} + z e^{-x} - 2ze^{-x} = 4e^{-x}$

$z'' - 2z' + z - z' + z - 2z = 4 \Rightarrow z'' - 3z' = 4 \xRightarrow{z' = u} z' = -\frac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow z(x) = -\frac{4}{3}x + c$

Άρα, $y_\mu(x) = -\frac{4}{3} x e^{-x}$ και έτσι

$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{4}{3} x \cdot e^{-x}$

$y(0) = \alpha$ και $y(0) = b \Rightarrow c_1, c_2 = \dots$

Και συμπεραίνουμε ότι

$y_0(x) = \underbrace{\frac{1}{3}\left(2\alpha + \beta - \frac{4}{3}\right)e^{-x}}_{\to 0} + \frac{1}{3}\left(\alpha + \beta + \frac{4}{3}\right)e^{2x} - \underbrace{\frac{4}{3} x \cdot e^{-x}}_{\to 0}$, $x \in \mathbb{R}$

Πρέπει, $\alpha + \beta + \frac{4}{3} = 0$ διότι $e^{2x} \to \infty$ ώστε η $y_0(x)$ να είναι φραγμένη

ΑΣΚΗΣΗ Β-5 (σελ. Β-9 Άλυτες)

$y'' + 8y' + 25y = 2\cos x$

ΝΔΟ $\exists\ \alpha, \delta \in \mathbb{R}$ σταθερές ώστε $\forall$ λύση y της Δ.Ε

$\lim (y(x) - \alpha \cos(x - \delta)) = 0$

Λύση

(E_0): $y'' + 8y' + 25y = 0$

$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-8 \pm 6i}{2} = -4 \pm 3i$

ΒΣΛ $\{e^{-4x}\cdot\cos 3x,\ e^{-4x}\cdot\sin 3x\}$

$\bar{y}'' + 8\bar{y}' + 25y' = 2e^{ix}$, $y = Re(\bar{y})$

Θέτω $y = z\cdot e^{ix}$

$z''e^{ix} + 2z'i\cdot e^{ix} + z(-1)\cdot e^{ix} + 8(z'e^{ix} + zie^{ix}) + 25ze^{ix} = 2e^{ix}$

$\Rightarrow z'' + 2iz' - z + 8z' + 8iz + 25z = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z'' + (8+2i)z' + (24+8i)z = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z(x) = \frac{2}{24+8i}$

$\bar{y}(x) = \frac{1}{12+4i}(\cos x + i\sin x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3+i}\right)(\cos x + i\sin x) =$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3-i}{10}(\cos x + i\sin x)$

$y_M(x) = Re\,\bar{y}(x) = \frac{1}{40}(3\cos x + \sin x)$ (1)

$y(x) = e^{-4x}(c_1\cdot\cos 3x + c_2\cdot\sin 3x) + \frac{1}{40}(3\cos x + \sin x)$

Παρατήρηση 1: $\forall c_1, c_2 \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} e^{-4x}(c_1\cdot\cos 3x + c_2\sin 3x) = 0$.

Παρατήρηση 2: $A, B \neq 0$, $A\cos x + B\sin x =$

$= A\left[\cos x + \frac{B}{A}\sin x\right] =$ $\left(\theta\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ tg\theta = \frac{B}{A} \Rightarrow \theta = Arc\,tg\frac{B}{A}\right)$

$= A\left[\cos x + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta\right] = \frac{A}{\cos\theta}(\cos x\cos\theta + \sin\theta\sin x) =$

$= \frac{A}{\cos\theta}\cdot\cos(\theta - x)$

Άρα, η (1) γράφεται:

$y_M(x) = Re\,\bar{y}(x) = \frac{3}{40}\left(\cos x + \frac{5}{3}\sin x\right) = \frac{3}{40\cos\theta}\cos(x-\theta)$, $\theta = Arctg\frac{5}{3}$

$\lim_{x\to\infty} y(x)$

Άρα, $\lim_{x\to\infty}\left(y_M(x) - \frac{3}{40\cos\theta}\cos(x-\theta)\right) = 0$, $\theta = Arctg\frac{5}{3}$

Άσκηση Β-20 (ΛΥΜΕΝΕΣ σελ 31)

$y'' + \omega^2 \cdot y = A\cos(\omega x), \quad x \geq 0 \mid \omega, A > 0$

ΝΔΟ

$\limsup_{x\to\infty} |y(x)| = +\infty$ // $y_0(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Λύση

χ. πολ. $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \pm \omega i$

ΒΣΛ $\{\cos x, \sin \omega x\}$

$\bar{y} = z e^{i\omega x}$

$z'' e^{i\omega x} + 2z' i\omega e^{i\omega x} + z(i\omega)^2 \cdot e^{i\omega x} + \omega^2 \cdot z e^{i\omega x} = A e^{i\omega x}$

$z'' + z i\omega z' \cancel{- \omega^2 z} \cancel{+ \omega^2 \cdot z} = A \Rightarrow$

$\Rightarrow z'' + z i\omega z' = A \Rightarrow z'(x) = \frac{A}{2i\omega} x \Rightarrow z(x) = \frac{A}{2i\omega} x \Rightarrow$

$\Rightarrow z(x) = -\frac{Ai}{2\omega} x.$

$\bar{y}(x) = -\frac{Aix}{2\omega} \cdot (\cos x + i \sin x)$

$y_M = \operatorname{Re} \bar{y}(x) = \frac{A}{2\omega} x \sin(\omega x)$

Άρα

$y(x) = \overset{\text{φραγμ.}}{c_1 \cdot \cos(\omega x)} + \overset{\text{φραγμ.}}{c_2 \sin(\omega x)} + \frac{A}{2\omega} \cdot x \sin(\omega x)$

$\leadsto y_0(x) = \frac{A}{2\omega} x \sin(\omega x) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega x)$

Παρατηρείται ότι για την $x_\nu = \frac{1}{\omega}(2\nu\pi + \frac{\pi}{2})$

$\lim x_\nu = \lim \frac{1}{\omega}(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}) = \infty$

και

$\lim |y_M(x_\nu)| = \lim \frac{|A|}{2\omega} |x_\nu| \cdot |\sin(\omega x_\nu)| =$

$= \frac{|A|}{2\omega} \lim |x_\nu| \cdot |\sin(2\nu\pi + \frac{\pi}{2})| = \frac{|A|}{2\omega} \lim x_\nu \cdot 1 = +\infty$

Και συνεπώς $\limsup_{x\to\infty} |y_M(x)| = +\infty$

Β' τρόπος:

$\limsup |y(x_\nu)| = \lim |c_1 \overset{0}{\cancel{\cos(2\nu\pi + \frac{\pi}{2})}} + \overset{c_2}{c_2 \cancel{\sin(2\nu\pi + \frac{\pi}{2})}} + \overset{+\infty}{y_M(x_\nu)}|$

$= +\infty$

ΑΣΚΗΣΗ Β-40 (σελ Β-7)

Έστω $ay''+by'+cy=e^{-kx}$ | $a,b,c,k>0$

και $bk\neq ak^2+c$

Τότε νδο $\lim_{x\to\infty} y(x)=0$ $\forall y$: λύση

ΛΥΣΗ

$(\Sigma o): \alpha y''+by'+cy=0 \overset{x\eta}{\Rightarrow} \alpha\lambda^2+b\lambda+c=0$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

• $\Delta>0 \rightarrow \lambda_1,\lambda_2<0$

τότε ένα ΒΣΛ $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$

$y=ze^{-kx}$

$\alpha\cdot(z''\cdot e^{-kx}+2z'(-k)e^{-kx}+z(-k)^2e^{-kx})+$

$+b(z'\cdot e^{-kx}-kz\cdot e^{-kx})+cze^{-kx}=e^{-kx}\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha z''-2k\alpha z'+\alpha k^2z+bz'-kbz+cz=1\Rightarrow$

$\Rightarrow az''+z'(-2k\alpha+b)+z(\underbrace{ak^2+c-kb}_{\neq 0})=1 \Rightarrow$ 1η περ. z=1

Αρα, μηδενίζω το $-2k\alpha+b=0$ και το $a=0$

Έτσι παίρνω μια λύση:

$$z=\frac{1}{\alpha k^2+c-kb}$$

$$y_M=\frac{1}{ak^2-kb+c}e^{-kz}$$

Αρα

$$y(x)=c_1\cdot e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+\frac{1}{ak^2-kb+c}e^{-kx},\ x\in\mathbb{R}$$